## I - Groupes algébriques - variétés de drapeaux

<u>Def</u> (1) Un groupe algébrique linéaire $G$ sur $\mathbb{C}$ est sous-groupe fermé (Zariski) de $GL_n(\mathbb{C})$.

(2) Un $G$-module rationnel est un $\mathbb{C}[G]$-comodule, ie, une application $V \xrightarrow{\Delta_V} V \otimes \mathbb{C}[G]$ satisfaisant des axiomes naturels.

<u>NB</u> (1) Si $\dim V < \infty$ et $\Delta_V(v_i) = \sum_j v_j \otimes f_{ji}$, $(v_i)$ base de $V$, alors $\rho_V : G \to GL(V)$, $g \mapsto (f_{ji}(g))_{i,j}$ est un morphisme de groupes algébriques.

(2) $\forall V$ $G$-module rationnel, $V = \bigcup_{\substack{W \subset V \\ \dim W < \infty}} W$.

<u>EX</u> $\mathbb{C}[G]$ $G$-module rationnel tel que $(g \cdot f)(g') = f(g'g)$, noté

<u>Théorème</u>
(1) $\forall g \in GL_n(\mathbb{C})$ $\exists!\,(g_u, g_s)$ tel que $g = g_u g_s$, $\rho(g_u)$ unipotent, $\rho(g_s)$ semi-simple, $g_u g_s = g_s g_u$.

(2) Si $f : G \to G'$ morph de gp alg alors $f(g_u) = f(g)_u$, $f(g_s) = f(g)_s$

<u>NB</u> En particulier, si $i : G \hookrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ alors $i(g_u) = i(g)_u$, $i(g_s) = i(g)_s$.

**Déf** $G$ gp lin

(1) $G_u = \{g ; g = g_u\} = \{$éléments unipotents$\}$ } sous-variétés fermées de $G$.

(2) $G_s = \{g ; g = g_s\} = \{$éléments semisimples$\}$

(3) $G$ unipotent si $G = G_u$

(4) $G$ diagonalisable si $G$ commutatif et $G = G_s$.

**Théorème** $G$ gp lin.

(1) $G$ commutatif $\Rightarrow$ $G_s, G_u \subset G$ sg fermés et $G_s \times G_u \xrightarrow{m} G$ isom de groupes algébriques.

(2) $G$ diagonalisable $\Leftrightarrow$ $G \subseteq (\mathbb{C}^\times)^N$ sg fermé.

$\Leftrightarrow$ $G \simeq \pi_0(G) \times G^0$, $G^0$ un tore.

**Déf** (1) Un tore est un gp alg $\simeq (\mathbb{C}^\times)^N$.

(2) $\{$caractères$\} = X^*(G) = \mathrm{Hom}_{gp\,alg}(G, \mathbb{C}^\times)$.

**NB** $X^*(G) \subset \mathbb{C}[G]$ Abelian sg

**Déf** $\forall V \in \mathrm{Rep}G$, $\forall \chi \in X^*(G)$, $V_\chi = \{ v \in V ; gv = \chi(g) v \ \forall g \in G\}$.

**Théorème**

(1) $X^*(G)$ consists of lin. indep't vectors of $\mathbb{C}[G]$.

(2) $\forall V \in \mathrm{rep}G$, $\sum_\chi V_\chi$ is direct and equal to $V$ if $V$ is rationnel

(3) $G$ diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}[G] = \mathbb{C}X^*(G)$

$G$ tore $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}[G] = \mathbb{C}X^*(G)$ et $X^*(G)$ torsion free.

**Théorème** (rigidité) $G$ gp lin, $H \subset G$ sg fermé diagonalisable

Alors $N_G(H)^0 = Z_G(H)^0$, donc $N_G(H)/Z_G(H)$ fini.